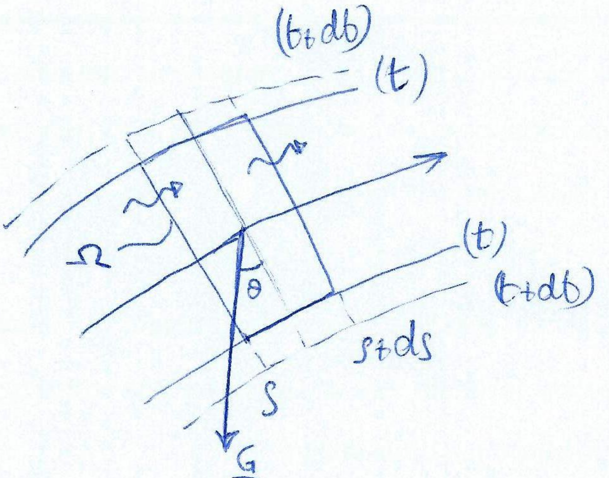
L'equazione di continuità della corrente

Immaginiamo un getto d'acqua cilindrico che si espande:



La densità è uniforme nello spazio, ma variabile nel tempo:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \Omega \cdot ds$$

I flussi sono:

$$F_m^{IN} = (\rho Q)_s$$

$$F_m^{OUT} = (\rho Q)_{s+ds} + \frac{\rho\left[(\Omega)_{t+dt} - (\Omega)_t\right] ds}{dt}$$

Il principio di conservazione della massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega\, ds + (\rho Q)_{s+ds} + \frac{\rho\left[(\Omega)_{t+dt} - (\Omega)_t\right] ds}{dt} - (\rho Q)_s = 0$$

Sviluppando in serie di Taylor ($F(x+dx) = F(x) + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx$):

$$(\rho Q)_{s+ds} - (\rho Q)_s = \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s}\, ds$$

$$(\Omega)_{t+dt} - (\Omega)_t = \frac{\partial \Omega}{\partial t}\, dt$$

Quindi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega\, \cancel{ds} + \frac{\partial \rho Q}{\partial s}\, \cancel{ds} + \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t}\, \cancel{ds} = 0$$

In cui $\frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega + \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\partial (\Omega \rho)}{\partial t}$. Allora l'equazione di continuità della corrente è:

$$\frac{\partial (\rho \Omega)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho Q)}{\partial s} = 0$$

Casi particolari:

- fluido incomprimibile: $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial s}$ (ρ costante);
- moto stazionario $\left(\frac{\partial \rho \Omega}{\partial t} = 0\right)$: $\frac{\partial \rho Q}{\partial s} = 0 \Rightarrow F_m = \rho Q = cost$
  $\Rightarrow$ portata massica costante
- moto stazionario di fluido incomprimibile:
  $$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial s} \quad e \quad F_m = \rho Q = cost \Rightarrow Q = cost$$

La portata volumetrica è costante: $Q = U \Omega = cost$.